

快速提升小波变换在介质体散射中的运用

沙 威, 吴先良

(安徽大学 计算智能与信号处理教育部重点实验室, 安徽 合肥 230039)

摘 要: 推导一种用于求解介质体散射问题的面积分方程, 它克服了内谐振现象, 且同体积分方程相比, 获得了更小的阻抗矩阵维数。一种新的基于提升法的类小波变换预处理算子的使用, 降低了矩阵向量积的计算复杂度和求逆过程中的迭代次数。数值结果表明, 与传统方法相比, 提升法消减了预处理矩阵的多余内存, 并且节省了约 1 倍的计算时间。

关键词: PMCHWT 方程; 提升法; 类小波变换; 介质体散射

中图分类号: TN011 **文献标识码:** A **文章编号:** 1003-5060(2006)02-0238-04

Application of fast lifting wavelet transform to dielectric scattering problems

SHA Wei, WU Xian-liang

(Key Lab of Intelligent Computing & Signal Processing of the Ministry of Education, Anhui University, Hefei 230039, China)

Abstract: A surface integral equation is derived for solving dielectric scattering problems. It avoids the internal resonance phenomenon, and smaller dimensions of the impedance matrix are obtained by comparison with the volume integral equation. In order to reduce the computation complexity of the matrix-vector product and the iterative times in the process of matrix inverting, a new wavelet-like preconditioning operator based on the lifting scheme is used. Numerical results suggest that compared with the traditional method, the lifting scheme cuts down the auxiliary memory for preconditioning matrices and saves about half computation time.

Key words: PMCHWT equation; lifting scheme; wavelet-like transform; dielectric scattering

矩量法求解介质体散射问题, 分为体积分方程方法和面积分方程方法。共轭梯度快速傅里叶(CG-FFT)变换, 被广泛的应用于体积分方程, 取得了快速而有效的数值结果, 使每次迭代的矩阵向量积的计算复杂度由 $O(N^2)$ 下降到 $O(N \log_2 N)$ 。而面积分方程算法, 由于边界离散的实施, 生成了相对低维数的阻抗矩阵, 在介质体散射的求解中有其自身的优势。但 CG-FFT 算法难以在面积分方程的电磁建模中有效实现。为

了克服此瓶颈, 类小波变换作为一种预处理算子被引入^[1]。此后, 小波包和自适应小波包算法, 被进一步改进和发展^[2]。最近, 自适应小波包变换同快速多极子方法(MLFMM)相融合, 且总的计算复杂度被控制在 $O(N \log_2 N)$ 数量级之内^[3]。

本文将快速提升小波算法应用于预处理过程, 来解决均匀介质体的散射问题。PMCHWT 方程的使用, 避免了内谐振, 保证全频段方程解的唯一性。

收稿日期: 2005-03-10; 修改日期: 2005-04-22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60371041); 安徽省教育厅重点科研基金资助项目(2002kj32)

作者简介: 沙 威(1982-), 男, 安徽宿州人, 安徽大学硕士生;

吴先良(1955-), 男, 安徽亳州人, 安徽大学教授, 博士生导师。

1 PMCHWT 方程的推导

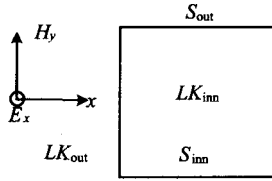


图 1 介质体散射问题模型

考虑平面波 (TM_z) 介质体散射问题。(1) ~ (4) 式给出简化的 Stratton-Chu 积分方程。

$$WJ M_i + KL_j J M_i / \tan = EH^{inc} / \tan ,$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, JM_i = \begin{bmatrix} J_i \\ 0 \\ M_i \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$LK_j = \begin{bmatrix} L_j & - 0 & K_j \\ 0 & K_j & \frac{2}{j} L_j \end{bmatrix}, EH^{inc} = \begin{bmatrix} E^{inc} \\ 0 \\ H^{inc} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$L_j X(r) = jk_j \int_{S_i} [X(r) + k_j^2 \nabla \nabla \cdot X(r)] G(k_j / |r - r'|) ds \quad (3)$$

$$K_j X(r) = \frac{1}{2} X(r) + PV \int_{S_i} \nabla G(k_j / |r - r'|) ds \quad (4)$$

其中, L_j 、 K_j 为积分算子; \tan 代表切向分量; inc 代表入射场; i 代表源边界区域; j 代表场区域。(2) 式中, 0 是真空中波阻抗; j 是场媒质中波阻抗; J_i 和 M_i 为电流和磁流源。(3) 式中, k_j 是场媒质中波数; G 是格林函数; 二维和三维散射问题分别为 $-\frac{j}{4} H_0^{(2)}(k_j |r - r'|)$ 和 $\frac{e^{-jk_j |r - r'|}}{4 |r - r'|}$ 。(4) 式中, PV 是柯西 (Cauchy) 主值积分; S_i 是源边界。在介质体散射模型中, 问题被分为内外区域。外算子和外部源边界记为 $L K_{out}$ 和 S_{out} , 内算子和内部源边界记为 $L K_{in}$ 和 S_{in} 。在内问题中, 入射场为零。引入连接边界条件

$$JM_{in} = - JM_{out} \quad (5)$$

JM_{in} 和 JM_{out} 分别代表内、外部的总电流或磁流。这里的负号, 考虑到内外边界法线方向相反。

将 (1) ~ (4) 式代入 (5) 式, 采用迦略金方法得到介质体的三维 PMCHWT 方程^[4]

$$(LK_{in} + LK_{out}) a = EH^{inc} \quad (6)$$

这里 a 是定义在介质体边界的矢量基函数; a

为未知电流和磁流展开系数。在二维问题中, 展开函数一般选用脉冲基函数, 测试函数选迪拉克函数。通过特殊的处理, 点匹配方法仍然可以使用^[5]。

2 提升法

2.1 完美重构条件

紧支撑小波变换, 等价于子带滤波, 如图 2 所示。正变换是信号先通过分解低通滤波器 \tilde{h} 和高通滤波器 \tilde{g} , 然后下采样; 反变换是先上采样, 然后通过重构低通滤波器 h 和高通滤波器 g 。将滤波器 $h(z)$ 改写成

$$h(z) = h_e(z^2) + z^{-1} h_o(z^2) \quad (7)$$

这里, $h_e(z) = \sum_k h_{2k} z^{-k}$ 为滤波器偶系数; $h_o(z) = \sum_k h_{2k+1} z^{-k}$ 为奇系数。

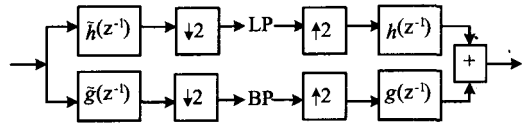


图 2 子带滤波

完美重构 (PR) 条件^[6]的多项矩阵形式, 可以表示为

$$P(z) \tilde{P}(z^{-1})^T = I \quad (8)$$

$$P(z) = \begin{bmatrix} h_e(z) & g_e(z) \\ h_o(z) & g_o(z) \end{bmatrix}, \tilde{P}(z) = \begin{bmatrix} \tilde{h}_e(z) & \tilde{g}_e(z) \\ \tilde{h}_o(z) & \tilde{g}_o(z) \end{bmatrix}.$$

在保证 PR 条件的基础上, 将互补滤波器族 $\{h, g\}$ 和 $\{\tilde{h}, \tilde{g}\}$ 采用对偶提升和原提升, 就获得新的互补滤波器。对偶上升是预测过程, 而原提升是更新过程。

2.2 因子化公式

根据因子化理论, 任何基于有限长滤波器的小波变换, 可以经多次提升实现。小波正变换和反变换的因子化公式由欧拉算法导出^[6]

$$P(z) = \prod_{i=1}^m \begin{bmatrix} 1 & s_i(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t_i(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1/K \end{bmatrix} \quad (9-1)$$

$$\tilde{P}(z) = \prod_{i=1}^m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -s_i(z^{-1}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -t_i(z^{-1}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \quad (9-2)$$

$$P^{-1}(z) = \prod_{i=m}^1 \begin{bmatrix} 1/K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t_i(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -s_i(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10-1)$$

$$\tilde{P}^{-1}(z) = \begin{matrix} 1 & K & 0 \\ i=m & 0 & 1/k \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & t_i(z^{-1}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s_i(z^{-1}) & 1 \end{bmatrix} \quad (10-2)$$

这里, $t(z)$ 和 $s(z)$ 是任意的罗朗多项式; k 是常数。反变换仅是正变换简单的逆序, 并对加减和乘除符号进行交换。

提升算法, 由分裂、预测、更新 3 步构成^[7]。

(1) 分裂。将数据集分成奇偶子集。

$$x_o[n] = x[2n+1] \quad x_e[n] = x[2n] \quad (11)$$

这里, x 代表源数据集; x_o 代表奇子集(分量); x_e 代表偶子集(分量)。

(2) 预测。通过预测算子 P , 将其作用于偶分量, 来预测奇分量, 两者相减生成高频分量 $d(n)$ (小波系数)。

$$d[n] = x_o[n] - P(x_e[n]) \quad (12)$$

(3) 更新。通过更新算子 U , 将其作用于高频分量, 并与偶分量相加生成信号的低频分量或粗略概貌 $c[n]$ (尺度系数)。

$$c[n] = x_e[n] + U(d[n]) \quad (13)$$

3 广义矩阵压缩方法

3.1 基本理论

矩量法的本质是求解线性代数方程

$$ZJ = V \quad (14)$$

这里, Z 是阻抗矩阵; J 是未知电流和磁流向量; V 是电压(激励)向量。

广义阻抗压缩, 则是对矩阵方程(14)进行类小波或小波包变换, 在保证矩阵稳定性的前提下, 使其稀疏化, 进而降低迭代次数和每次迭代所需的运算量。它分成阻抗矩阵和电压向量正变换、矩阵稀疏化和迭代求解、电流反变换几个主要步骤。(15)式给出了阻抗矩阵和电压向量正变换的操作表达

$$WZWWI = WV, \tilde{Z}I = V \quad (15)$$

这里, $Z = WZW, V = WV$ 。 W 和 W 是小波滤波器系数构造的预处理稀疏矩阵, 满足正交性条件: $W W = W W = I$ 。为了合理稀疏化矩阵, 基于矩阵列和范数的阈值标准被使用。

$$= Z_1 / N = \max_m \sum_n |Z(n, m)| / N \quad (16)$$

这里, N 是矩阵维数; 是控制变量, 决定矩阵稀

疏度和电流相对误差; 是阈值, 低于此阈值的矩阵元素被置为 0。

对于系数矩阵的迭代算法, 一般采用共扼梯度(CG)算法或广义最小余量法(GMRES)。对矩阵方程解 \tilde{I} 使用小波反变换, 得到真实电流 I 。

$$I = W\tilde{I} \quad (17)$$

3.2 因子化实现

快速提升法采用了无需任何内存的原位操作, 经分裂、预测、提升步骤, 加速了小波变换, 并简化其操作流程。为了说明提升法的原理, 列举了一个 Coher-Daubechies-Feauveau2.2小波的例子。对电压向量和阻抗矩阵的正变换和对电流反变换如下。

阻抗矩阵的列变换(即为因子化 $P(z)$)

$$\begin{aligned} O_l^{(0)} &= x_{2l+1}, E_l^{(0)} = x_{2l} \\ O_l^{(1)} &= O_l^{(0)} - \frac{1}{2}(E_{l+1}^{(0)} + E_l^{(0)}) \\ E_l^{(1)} &= E_l^{(0)} + \frac{1}{4}(O_l^{(1)} + O_{l-1}^{(1)}) \\ O_l^{(2)} &= \frac{\sqrt{2}}{2}O_l^{(1)}, E_l^{(2)} = \sqrt{2}E_l^{(1)} \end{aligned} \quad (18)$$

这里, x_{2l} 和 x_{2l+1} 分别为矩阵或电压列向量中的偶分量和奇分量; $E_l^{(2)}$ 和 $O_l^{(2)}$ 分别是低频和低频分量。反复使用此步骤, 可以实现多层类小波变换。

阻抗矩阵行变换(因子化 $P(z)$)

$$\begin{aligned} E_l^{(0)} &= x_{2l}, O_l^{(0)} = x_{2l+1} \\ E_l^{(1)} &= E_l^{(0)} + \frac{1}{2}(O_l^{(0)} + O_{l-1}^{(0)}) \\ O_l^{(1)} &= O_l^{(0)} - \frac{1}{4}(E_{l+1}^{(1)} + E_l^{(1)}) \\ E_l^{(2)} &= \frac{\sqrt{2}}{2}E_l^{(1)}, O_l^{(2)} = \sqrt{2}O_l^{(1)} \end{aligned} \quad (19)$$

反电流变换(因子化 $\tilde{P}^{-1}(z)$)

$$\begin{aligned} E_l^{(1)} &= \frac{\sqrt{2}}{2}E_l^{(2)} \\ O_l^{(1)} &= \sqrt{2}O_l^{(2)} \\ E_l^{(0)} &= E_l^{(1)} - \frac{1}{4}(O_l^{(1)} + O_{l-1}^{(1)}) \\ O_l^{(0)} &= O_l^{(1)} + \frac{1}{2}(E_{l+1}^{(0)} + E_l^{(0)}) \\ x_{2l} &= E_l^{(0)}, x_{2l+1} = O_l^{(0)} \end{aligned} \quad (20)$$

为了满足正交性条件, 所有边界处理采用周期化方法。

4 数值结果

图 3 所示是非磁性介质方柱双站雷达散射截面(RCS)。此时入射波为 TM_z 平面波,入射方向为 x 方向,正方体柱边长为 1 个波长,相对介电常数为 2。为了验证 PMCHWT 方程的正确性,体积分方程解被画出。

表 1 给出了提升算法相对传统类小波变换算法所节省的内存和计算机时间。方柱的边长为 10 倍波长,阻抗矩阵维数 1024×1024 。测试小波选用 Daubechies 小波。消失矩分别为 2, 4, 8。

保持矩阵维数不变,表 2 给出了不同消失矩情况下,矩阵稀疏度和节省求逆时间比例的变化。所有电流相对 2 范数误差都保持在 3% 左右。算法为提升法。

图 4 显示了二维介质圆柱的双站散射截面,

经提升小波变换(LWT)后的 PMCHWT 方程解和解析解给出作为比较。入射波为 TM_z 平面波,传播方向 x 方向。圆柱半径 4 个波长,相对介电常数 4,相对磁导率 2。图 5 所示是经小波压缩后矩阵非零元素(黑色)分布图。

表 1 提升法比传统类小波变换节省的时间和内存

小波种类	变换节省时间比例/(%)	节省内存/kb
Db2	52	208
Db4	54	408
Db8	60	738

表 2 不同消失矩小波求逆节省时间比例和矩阵稀疏度

小波种类	求逆节省时间比例/(%)	稀疏度/(%)
Db2	39	25
Db4	45	75
Db8	60	85

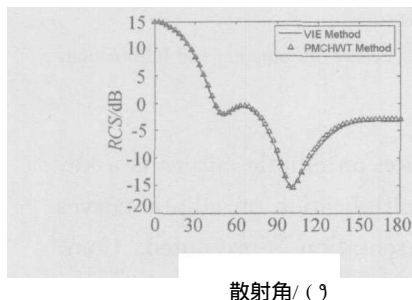


图 3 PMCHWT 方程和 VIE 方程求解的比较

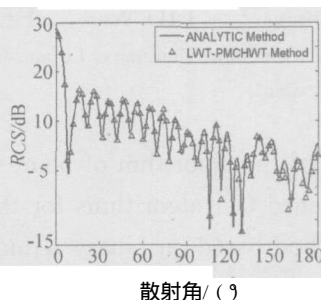


图 4 介质圆柱双站 RCS 比较

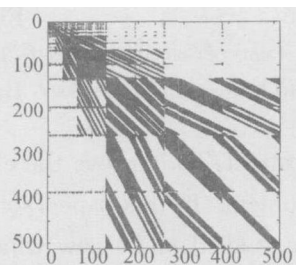


图 5 压缩矩阵非零元素分布图

5 总 结

新的提升法实现类小波变换,采用了原位操作的因子化算法,无需任何多余内存,提高了计算速度,增加了编程的灵活性。此算法可以广泛用于电磁散射和辐射问题中矩阵的预处理操作,也可以和其他算法相融合。

[参 考 文 献]

- [1] Canning F X, Scholl J F. Diagonal preconditioners for the EFIE using a wavelet basis [J]. IEEE Trans Antennas and Propogate, 1996, 44(9): 1 239 - 1 246.
- [2] Hai Deng, Hao Ling. Fast solution of electromagnetic integral equations using adaptive wavelet packet transform [J]. IEEE Trans Antennas and Propogate, 1999, 47 (4): 574 - 582.
- [3] Hai Deng, Hao Ling. An efficient wavelet preconditioner for iterative solution of three-dimensional electromagnetic integral equations[J]. IEEE Trans Antennas and Propogate,

2003, 51(3): 654 - 660.

- [4] Chu Yunhui, Chew W C, Zhao Junsheng, et al. A surface integral equation formulation for low-frequency scattering from a composite object[J]. IEEE Trans Antennas and Propogate, 2003, 51(10): 2 837 - 2 844.
- [5] Glisson A W, Wilton D R. Simple and efficient numerical methods for problems of electromagnetic radiation and scattering from surfaces [J]. IEEE Trans Antennas and Propogate, 1980, 28(5): 593 - 603.
- [6] Daubechies I, Sweldens W. Factoring wavelet transforms into lifting steps[J]. Fourier Anal, 1998, 4(3): 247 - 269.
- [7] Gouze A, Antonini M, Barlaud M, et al. Macq. Design of signal-adapted multidimensional lifting scheme for lossy coding[J]. IEEE Trans Image Processing, 2004, 13(12): 1 589 - 1 603.
- [8] Xiang Zhonggui, Lu Yilong. An effective wavelet matrix transform approach for efficient solutions of electromagnetic integral equations[J]. IEEE Trans Antennas and Propogate, 1997, 45(8): 1 205 - 1 213.

(责任编辑 杨伯源)